Лекция 6. Свойства преобразования Фурье

1) Линейность: $F(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha F f_1 + \beta F f_2$

2) Свойство подобия: $F(f(\alpha t)) = \frac{1}{\alpha} Ff\left(\frac{t}{\alpha}\right)$

3) Непрерывность:

Если $\{f_n\} \to \{f_0\}$ **в $L_1(R)$, то** $\{\hat{f}_n\} \to \{\hat{f}_0\}$ **равномерно.**

4) Преобразование Фурье производной, если производная абсолютно интегрируема:

$$F\left(\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right) = (i\xi)^n Ff(\xi)$$

- доказательство проводится интегрированием по частям.

5) Преобразование Фурье первообразной

$$F\left(\int F(t)dt\right) = \frac{1}{i\xi} Ff(\xi)$$

- первообразная должна существовать и быть абсолютно интегрируемой.

6) Теорема о сдвиге

$$\left[Ff(t-\tau)\right](\xi) = e^{-i\xi\tau} Ff(\xi)$$

7) Дифференцирование преобразования Фурье.

$$\frac{d}{d\xi}\left[Ff\right] = \left[F\left(-ixf(x)\right)\right](\xi)$$

для справедливости формулы требуется чтобы $|xf(x)| \in L_1(R)$ **либо** $|f(x)| \sim O\left(\frac{1}{x^2}\right)$, при $x \to \infty$

8) Теорема о модуляции

$$\left[Ff(t)e^{i\omega_0 t}\right](\xi) = Ff(\xi - \omega_0)$$

9) Теорема о свертке.

$$F(f**g) = Ff \cdot Fg$$

10) Равенство Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} |Ff(\xi)|^2\, d\xi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx, \text{ если } \quad f \in L_1(R) \bigcap L_2(R).$$

11) Убывание на бесконечности.

Если f и ее производная до порядка *(n-1)* →0 при |*x*| →∞ то

$$|\xi|^n \cdot Ff(\xi) \to 0, \quad |\xi| \to \infty$$

12) Теорема Планшереля.